

УДК 533.951

**МОДУЛЯЦИЯ ПРОДОЛЬНЫХ ТОКОВ  
В ОТКРЫТЫХ МАГНИТНЫХ ЛОВУШКАХ, ОБУСЛОВЛЕННАЯ  
ПОТЕНЦИАЛЬНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ ПЛАЗМЫ**

БЕХТЕНЕВ А. А., ВАНДЕГРИФТ Г. Г.<sup>1</sup>, ВОЛОСОВ В. И.

**1. Введение**

Одна из особенностей открытых магнитных ловушек — наличие продольных потоков плазмы через «пробки» ловушки. Физические процессы в ловушке могут существенно влиять на величину и структуру потоков плазмы; с другой стороны, эти потоки (в частности, поток электронов) могут заметно воздействовать на физические процессы в ловушке.

Времена жизни ионов и электронов в ловушке и соответственно продольные токи в среднем равны между собой при условии, что в плазме отсутствуют заметные поперечные потоки частиц, а также при равенстве мощности источников ионов и электронов в плазме. При этом время жизни частиц определяется продольными потенциалами: магнитным, электрическим и центробежным.

Плотность продольного тока, уходящего из ловушки, выражается через время жизни частиц в плазме  $\tau_L$ , их среднюю плотность  $n_0$  и длину ловушки  $L$ :

$$j_0 = n_0 L / \tau_L. \quad (1)$$

Ниже для краткости величина  $j_0$  называется продольным током. Впервые расчеты удержания плазмы и соответственно продольных стационарных токов в простейшем «пробкотроне» были проведены в [1]; сегодня эти расчеты проводятся, как правило, численно [2].

Если в открытой ловушке происходят какие-либо колебательные процессы, изменяющие величину барьерного электрического потенциала плазмы  $\phi$  во времени (рис. 1), то величина продольного электронного тока также будет изменяться во времени. При этом продольный ток ионов практически не меняется, так как ионы, уходящие из ловушки, лишь допускаются барьерным потенциалом. В случае гармонических процессов, если глубина модуляции продольного тока невелика, можно рассматривать переменную составляющую этого тока как некоторый дополнительный продольный электронный ток  $j_1(t) = j_1 \exp(-i\omega t)$ .

Ниже исследуется зависимость этого тока от частоты в широком диапазоне частот. Для интервалов частот, которые лежат вдали от резонансов, удается найти достаточно простые аналитические решения (разд. 3). Для резонансного случая ( $\omega \approx \tau_b^{-1}$ , где  $\tau_b^{-1}$  — баунс-частота) построена приближенная теория (разд. 4). Анализ резонансных решений показывает отсутствие существенных особенностей в этой области.

**2. Задача о токе  $j_1(t)$**

Рассмотрим задачу о влиянии колебаний потенциала плазмы  $\phi$  на величину продольного электронного тока  $j$ . Примем

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_0 + \phi_1 \exp(-i\omega t), \\ j &= j_0 + j_1 \exp(-i\omega t). \end{aligned} \quad (2)$$

<sup>1</sup> Колумбийский университет, Нью-Йорк, США.

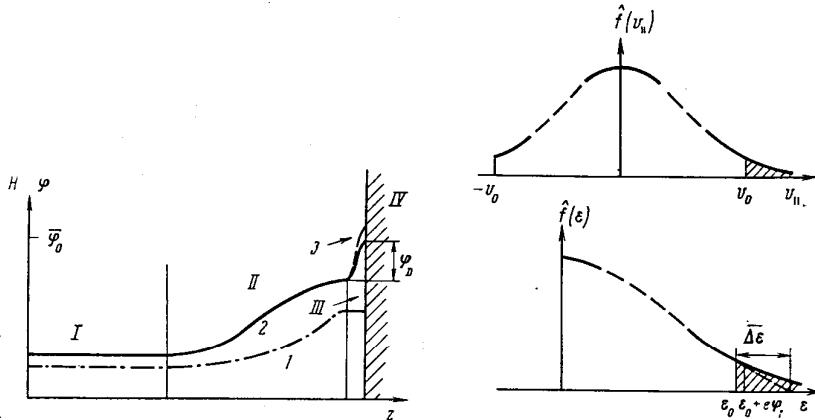


Рис. 1

Рис. 2

Рис. 1. Распределение электрических потенциалов  $\phi_0$ ,  $\phi_1$  и магнитного поля  $H$  в магнитной ловушке; кривая 1 – поле  $H$ , 2 –  $\phi_0$ , 3 –  $\phi_0 + \phi_1$ . Область I – центральная часть ловушки; II – область магнитной пробки (амбиполярный барьер); III – область пристеночного падения потенциала; IV – коллектор.  $\phi_D$  – падение потенциала в пристеночном дебаевском слое. Потенциал  $\phi_0 + \phi_1$  отсчитывается от потенциала в центре ловушки

Рис. 2. Качественный вид функций распределения электронов по продольной скорости  $\hat{f}(v_{||})$  и по энергии  $\hat{f}(\epsilon)$  вблизи магнитной пробки

Пусть величины  $|\phi_1| \ll |\phi_0|$ ,  $|j_1| \ll |j_0|$ ; пусть также  $\partial U_0 / \partial z \geq 0$  (удерживающий потенциал  $U_0 = e\phi_0 + \mu H$ ) во всей области от центра ловушки до концевого электрода<sup>2</sup>. Рассматриваются потенциальные колебания с  $k_z = 0$ , т. е.  $\partial \phi_1 / \partial z = 0$  всюду, кроме дебаевского слоя вблизи концевого электрода.

При наличии азимутального дрейфа электронов задача рассматривается во вращающейся системе координат, где этот дрейф отсутствует. Учет азимутального дрейфа в лабораторной системе координат осуществляется заменой  $\omega \rightarrow \omega - l\Omega_e$ , где  $l$  – азимутальное волновое число,  $\Omega_e$  – частота дрейфа.

В магнитной ловушке границей, отделяющей область удержания электронов от области потерь в пространстве скоростей (так называемый «конус потерь»), является гиперболоид вращения. Дополнительный уход электронов и соответственно изменение  $j_1$  при малых изменениях барьера потенциала связаны с диффузией электронов по энергии  $\epsilon$  и углу  $\theta$  вблизи границы. Поскольку точное решение задачи в этой постановке весьма громоздко, ниже рассматривается для упрощения задача для сферически-симметричной границы, где диффузия идет только по энергии. Полученные решения связаны с формой границы области удержания через один параметр  $\Delta\epsilon$  (см. ниже), определяемый скоростью диффузии на границе. Если величину этого параметра определять с учетом реальной диффузии, т. е. по  $\epsilon$  и  $\theta$ , то полученные решения будут точными для любой формы границы. Заметим, что поскольку вклады диффузии по  $\epsilon$  и  $\theta$  соизмеримы, то для  $R \approx 1$  решения являются достаточно точными даже без этого уточнения.

Рассматривается случай, когда длина свободного пробега электронов много больше продольного размера системы

$$\lambda_e \gg L. \quad (3)$$

Обратный предельный случай ( $\lambda_e \ll L$ ) – задача о контакте со стенкой плотной холодной плазмы – подробно исследовалась ранее в [3–5].

<sup>2</sup> Если между магнитной «пробкой» и электродом имеется расширяющееся магнитное поле, это условие перестает выполняться для малой группы электронов с большим  $\mu$ . Вклад этих частиц в ток  $j_1$  должен рассматриваться особо; однако если скорости электронов много больше скоростей ионов, то доля электронов с большим  $\mu$  мала, и полученные ниже результаты справедливы и в этом случае.

Задача решается при следующих предположениях: в плазме имеются стационарные источники ионов и электронов, которые в среднем компенсируют потери; вторичная электронная эмиссия мала и ею можно пренебречь; размер области амбиполярного и барьера потенциалов много меньше длины ловушки.

Для упрощения предполагается, что электроны уходят из ловушки только через одну из пробок (для ловушки с двумя одинаковыми пробками все результаты остаются в силе при замене  $L$  на  $L/2$  при определении  $\tau_b$ ) (см. ниже). Величина тока  $j_1$  существенно связана с функцией распределения электронов (по скоростям и по энергии) вблизи этой пробки. Будем ниже обозначать ее как  $\hat{f}$ .

В рассматриваемой задаче имеется несколько характерных времен. Это — обратная частота колебаний  $\omega^{-1}$ ; время продольных (баунс) колебаний электронов в ловушке  $\tau_b = 2L/\bar{v}_{\parallel}$ , где  $v_{\parallel}$  — продольная скорость электронов,  $\bar{v}_{\parallel}$  — средняя продольная скорость электронов, находящихся вблизи потенциального барьера; время электронных кулоновских столкновений  $\tau_{ee}$  (см. [6, 7]); время жизни частиц в ловушке  $\tau_L$ . Практически для всех типов открытых ловушек  $\tau_{ee} \ll \tau_L$ , кроме того,  $\tau_b \ll \tau_{ee}$ . Поэтому сначала можно рассмотреть три простейших предельных задачи:  $\omega^{-1} \ll \tau_b$ ,  $\tau_b \ll \omega^{-1} \ll \tau_{ee}$  и  $\tau_{ee} < \omega^{-1}$ .

### 3. Функция отклика $j_1(\omega)$

Высокие частоты  $\omega^{-1} \ll \tau_b$ . Функции распределения электронов по энергии и по скорости  $\hat{f}(\varepsilon)$  и  $\hat{f}(v_{\parallel})$  в окрестности электростатического барьера приведены на рис. 2.

В стационарном случае ( $\varphi_i=0$ ) через барьер (энергетическая высота барьера  $\varepsilon_0$ , барьерный потенциал  $\Phi_0=\varepsilon_0/e$ ) постоянно уходят электроны из «хвоста» функции распределения с энергией  $\varepsilon < \varepsilon_0$ . Эти электроны могут приобрести избыток энергии над барьером ( $\varepsilon - \varepsilon_0$ ) лишь за одно прохождение между пробками (пролетное время  $\tau_b$ ). Можно оценить среднюю величину этой энергии  $\Delta\varepsilon$ , рассматривая процесс диффузионного набора или потери энергии быстрой частицей при прохождении через максвелловскую плазму с электронной температурой  $T_e$  [6]:

$$\overline{\Delta\varepsilon^2} = \varepsilon_0^2 (\tau_b / \tau_{ee}^e(\varepsilon_0)). \quad (4)$$

При  $\varepsilon_0 \gg T_e$ , используя обозначения работы [6], имеем  $\tau_{ee}^e(\varepsilon_0) = \tau_e^{e/e}(\varepsilon_0) \simeq \tau_1^{e/e}(T_e) (\varepsilon_0/T_e)^{1/2}$ ; учитывая, что  $\tau_1^{e/e}(T_e) = \tau_{ee}(T_e)$ , получаем из (4) (опуская множитель порядка единицы)

$$\overline{\Delta\varepsilon} = T_e (\tau_b / \tau_{ee}(T_e))^{1/2} (T_e / \varepsilon_0)^{1/4}. \quad (5)$$

Исследуем случай  $\varphi_i \neq 0$ . Пусть в момент времени  $t=0$  на барьерный потенциал накладывается импульсное возмущение  $\varphi_1$  ( $|e\varphi_1| \ll \overline{\Delta\varepsilon}$ ), причем длительность этого возмущения  $\Delta t \ll \tau_b$ . В течение этого времени электронный ток, вытекающий из ловушки, изменяется на величину

$$j_1 = e \int_{\varepsilon_0 + e\varphi_1}^{\infty} v_{\parallel} \hat{f}(\varepsilon) d\varepsilon - j_0.$$

Учитывая, что

$$j_0 = e \int_{\varepsilon_0}^{\infty} v_{\parallel} \hat{f}(\varepsilon) d\varepsilon \simeq e \bar{v}_{\parallel} f_0 |_{\varepsilon=\varepsilon_0} \overline{\Delta\varepsilon},$$

имеем

$$j_1 = -j_0 \frac{e\varphi_1}{\overline{\Delta\varepsilon}}. \quad (6)$$

Очевидно, что возмущение функции распределения, определяемое импульсом  $\varphi_1$ , может повлиять повторно на величину  $j_1$  в момент времени

$t=\tau_b$ , т. е. через время пролета электрона через ловушку. Повторным влиянием  $\varphi_1$  на  $j_1$  можно пренебречь, если  $\hat{f}$  через время  $\tau_b$  за счет перемещивания электронов по скоростям примет вид, близкий к невозмущенной  $\hat{f}$ . При этом условии величина  $j_1(t)$  определяется только мгновенными значениями  $\varphi_1$ , т. е. (6) справедливо при любых  $t>0$ .

Рассмотрим быстрые периодические процессы, когда  $\varphi_1 \sim \exp(-i\omega t)$ . Обозначим через  $\Delta\tau_b$  средний разброс по  $\tau_b$  для электронов, находящихся вблизи потенциального барьера. Условие перемешивания в этом случае имеет вид

$$\Delta\tau_b\omega \gg 1. \quad (7)$$

Разброс по  $\tau_b$  (или по фазам) определяется двумя процессами: разбросом по энергии  $\Delta\epsilon$  за счет диффузии (см. выше) и разбросом по  $v_{\parallel}$  за счет разброса по магнитным моментам  $\Delta\mu$ . Поэтому условие (7) можно представить в виде

$$[\langle (\partial\tau_b/\partial\epsilon)^2 \Delta\epsilon^2 \rangle + \langle (\partial\tau_b/\partial\mu)^2 \Delta\mu^2 \rangle]^{1/2} \omega \gg 1. \quad (8)$$

При этом условии величина  $j_1(t)$  определяется только мгновенным  $\varphi_1(t)$  аналогично (6) (см. также [8]):

$$j_1 = -j_0 \frac{e\varphi_1 e^{-i\omega t}}{\Delta\epsilon}. \quad (9)$$

Промежуточные частоты  $\tau_b \ll \omega^{-1} \ll \tau_{ee}$ . В этом случае величина тока  $j_1$  определяется изменением функции распределения электронов  $\hat{f}(\epsilon)$  вблизи барьера. Представим ее в виде  $\hat{f} = f_0 + f_1$ , где  $f_0$  — стационарное решение, а  $f_1$  — малая добавка, отличная от нуля в области  $|\epsilon_0 - \epsilon| \ll T_e$  (но  $|\epsilon_0 - \epsilon| \gg \Delta\epsilon$ ), которая определяет величину  $j_1$ . Уравнение Фоккера — Планка для  $f_1$  можно представить в виде [1]

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4\tau_{ee}} \left( \frac{T_e}{\epsilon} \right)^{1/2} T_e \left( T_e \frac{\partial^2 f_1}{\partial \epsilon^2} + \frac{\partial f_1}{\partial \epsilon} \right). \quad (10)$$

При сделанных выше предположениях о локализации  $f_1$  и с учетом  $\epsilon \gg T_e$  можно отбросить в этом уравнении член с первой производной по  $\epsilon$ ; можно также считать  $(T_e/\epsilon)^{1/2} = \text{const}$ . При этих условиях (10) имеет более простую форму

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial \epsilon^2}, \quad (11)$$

где

$$a^2 = \frac{3\sqrt{\pi}}{4\tau_{ee}} \left( \frac{T_e}{\epsilon_0} \right)^{1/2} T_e^2.$$

Учитывая, что  $f_1 \sim \exp(-i\omega t)$ , решение этого уравнения представим в виде

$$f_1(\epsilon, t) = f_1(\epsilon_0, t) \exp(\pm\sqrt{-i\omega}(\epsilon - \epsilon_0)/a). \quad (12)$$

Выбираем решение, затухающее при  $\epsilon \rightarrow 0$  ( $\text{Im } \omega > 0$ ). Границные условия для  $f_1$  найдем из равенства нулю полной функции распределения  $f_0 + f_1$ , на границе  $\epsilon = \epsilon_0 + e\varphi_1$ . Разлагая это условие в ряд по параметру  $e\varphi_1/\epsilon_0$  и учитывая, что для рассматриваемого случая  $f_0(\epsilon_0) = 0$ , получим

$$f_1(\epsilon_0, t) = -\left. \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=\epsilon_0} e\varphi_1(t). \quad (13)$$

Таким образом, из (12), (13) имеем

$$f_1(\epsilon, t) = -\left. \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=\epsilon_0} e\varphi_1(t) \exp(\sqrt{-i\omega}(\epsilon - \epsilon_0/a)). \quad (14)$$

Поскольку продольный ток электронов, уходящих из ловушки, пропор-

ционален  $\partial f / \partial \varepsilon |_{\varepsilon=\varepsilon_0}$ , то из (10) и (14) находим

$$j_1(t) = j_0 \sqrt{-i\omega \tau_{ee}} \frac{e\varphi_1(t)}{T_e (3\sqrt{\pi}/4)^{1/2} (T_e/\varepsilon_0)^{1/4}} \quad (15)$$

или

$$j_1(t) = -j_0 \sqrt{-i\omega \tau_b} e\varphi_1(t) / \Delta\varepsilon, \quad (16)$$

где

$$\Delta\varepsilon = T_e (\tau_b/\tau_{ee})^{1/2} (3\sqrt{\pi}/4)^{1/2} (T_e/\varepsilon_0)^{1/4}. \quad (17)$$

*Низкие частоты*  $\tau_{ee} \ll \omega^{-1}$ . Для того чтобы проследить за непрерывностью перехода от (16) к результатам работы [9], рассмотрим область низких частот ( $\tau_{ee} \ll \omega^{-1}$ ). Эту область частот можно разбить на два участка.

При  $\tau_{ee} \ll \omega^{-1} \ll \tau_b$  функция  $f_1$  определена в области энергий  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ . Ее значение  $f_1(t)$ , а также  $j_1(t)$  могут быть найдены из численного решения уравнения (10) с учетом источников.

При  $\tau_b \ll \omega^{-1}$  ток  $j_1(t)$  можно найти рассматривая приращение производной функции  $\hat{f}$  при квазистационарном изменении  $\varphi_1$ :

$$j_1/j_0 = \left( \frac{\partial \hat{f}\{\varepsilon_0 + e\varphi_1\}}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=\varepsilon_0+e\varphi_1} - \frac{\partial \hat{f}\{\varepsilon_0\}}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=\varepsilon_0} \right) / \frac{\partial \hat{f}\{\varepsilon_0\}}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=\varepsilon_0}. \quad (18)$$

В фигурных скобках дана высота барьера, при которой функция  $\hat{f}$  обращается в нуль.

Величина  $\hat{f}$  вычисляется в соответствии с [1] с учетом условий эксперимента. Если поддерживать постоянной плотность плазмы, то из (18)

$$j_1 = -j_0 (e\varphi_1 / T_e). \quad (19)$$

Это выражение совпадает с током  $j_1$ , который можно найти из [9].

Следует заметить, что при других условиях, например, при постоянстве мощности источника электронов, величина  $j_1$  существенно отличается от полученного выше выражения.

Следует также заметить, что во всей области частот  $\tau_{ee} < \omega^{-1}$  нарушается предположение о независимости ионного тока от  $\varphi_1$ . Это связано со следующим. Так как  $f_1$  перестраивается на участке  $|\varepsilon_0 - \varepsilon| > T_e$  (точнее  $|\varepsilon_0 - \varepsilon| > e\varphi_b \approx T_e$ ), то изменяется количество электронов на тех участках  $f_1$ , которые определяют амбиполярный потенциал в ловушке и соответственно высоту потенциального барьера для ионов. Поэтому приведенные выше оценки относятся только к электронной компоненте тока.

Представим полученные результаты в виде графика  $J(\omega) = -(j_1/j_0) \times \times (\Delta\varepsilon/e\varphi_1)$  (рис. 3). Заметим, что отрезки прямых, составляющих асимптотические решения, пересекаются в окрестности точек  $\omega^{-1} = \tau_{ee}$  и  $\omega^{-1} = \tau_b$ .

Выше рассмотрены случаи, перекрывающие всю область частот, представляющих интерес для открытых магнитных ловушек. Рассмотрим теперь вопрос о функции отклика в окрестности резонансной точки при  $\omega \approx \tau_b^{-1}$ .

#### 4. Функция $j_1(\omega)$ в резонансной области

Рассмотрим случай, когда характерные частоты колебаний лежат в окрестности  $\tau_b^{-1}$ ; пусть также  $\omega \gg \tau_{ee}^{-1}$ . Построим приближенное решение для  $j_1$  исходя из того, что отклик является линейной функцией  $\varphi_1(t)$ :

$$j_1(t) = \int_{-\infty}^t K(t-t_1) \varphi_1(t_1) dt_1. \quad (20)$$

Функцию  $J(\omega)$ , связывающую  $j_1(t)$  и  $j_0$ , в случае гармонического возмущения  $\varphi_1(t) = \varphi_1 \exp(-i\omega t)$  можно с учетом (20) представить в виде

$$J(\omega) = \int_{-\infty}^0 K_1(-t_1) e^{-i\omega t_1} dt_1, \quad (21)$$

где

$$K_1(t) = K(t) \overline{\Delta \epsilon} / ej_0.$$

Для нахождения  $K(t)$  рассмотрим задачу об отклике на ступенчатое возмущение вида

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} \varphi_1, & 0 < t < \Delta t \\ 0, & t \leq 0, \quad t \geq \Delta t \end{cases}$$

при  $\Delta t \ll \tau_b$  и  $e\varphi_1 \ll \overline{\Delta \epsilon}$ . Функцию распределения электронов, находящихся вблизи барьера, представим в виде  $\hat{f} = \hat{f}_0 + f_1$ , где  $\hat{f}_0$  — функция распределения электронов в стационарном режиме; функция  $f_1$  описывает локализованный сгусток электронов, движущийся между пробками и образовавшийся при  $0 < t < \Delta t$ ; при  $\varphi_1 = 0$  эти электроны должны были бы покинуть ловушку. Вид функций  $\hat{f}_0$  и  $f_1$  показан на рис. 2.

Рассмотрим эволюцию во времени функции  $f_1(t)$ , предполагая сначала, что время  $\tau_b$  одинаково для всех электронов. В момент времени  $t = \tau_b$

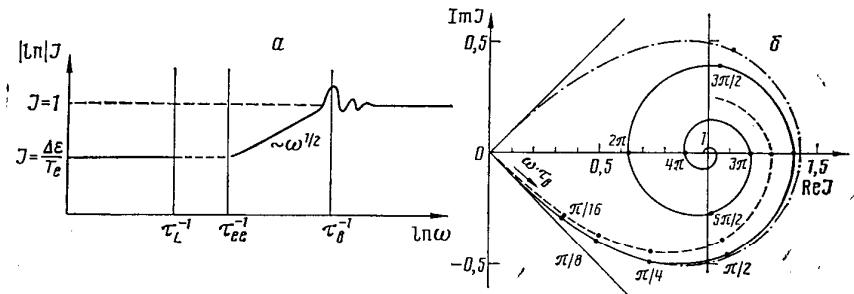


Рис. 3. Функция  $J(\omega)$ : а — зависимость  $|J|$  от частоты; б —  $J(\omega)$  в окрестности резонансной точки при различных значениях  $\Delta\tau_b$  и  $Im \omega$  (штрихпунктир отвечает случаю  $\Delta\tau_b=0$ ,  $Im \omega=0$ ; сплошная линия —  $\Delta\tau_b=0,1\tau_b$ ,  $Im \omega=0$ ; пунктир —  $\Delta\tau_b=0,1\tau_b$ ,  $Im \omega=0,1\omega$ )

группа электронов, описываемая  $f_1$ , возвращается к потенциальному барьеру и формирует импульс тока  $j_1$ . После прохождения через ловушку функция распределения  $f_1$  расплывается в пространстве скоростей по  $v_{||}$  за счет диффузии на основной массе электронов (рис. 4). Распределение этих электронов по энергии имеет вид функции Гаусса с характерным размером  $\Delta\epsilon$ . Очевидно, что половина электронов с энергией  $\epsilon > \epsilon_0$  уходит через барьер, а оставшаяся часть с  $\epsilon < \epsilon_0$  будет уходить на коллектор при последующих возвращениях этого сгустка электронов к барьеру. Изменение во времени функции распределения  $f_1$  описывается одномерным уравнением диффузии. Решая его, можно найти  $f_1(t)$  в последующие моменты времени, если известна  $f_1(t-\tau_b)$ . Следует заметить, что процесс диффузии для  $f_1$  является одномерным в силу условия  $\Delta\epsilon \ll T_e$  (размер области, занятой электронами, много меньше, чем характерные размеры поверхности «конуса потерь»). Заметим также, что хотя  $f_1$  на разных участках «конуса потерь» имеет различные значения параметров  $\epsilon_0$ ,  $v_{||}$  и др., однако полученные ниже выражения явно не зависят от этих параметров. Поэтому они справедливы для  $f_1$ , усредненной по всему «конусу потерь».

Обозначим индексом  $N$  число продольных колебаний сгустка. Тогда функция распределения по энергии для этих электронов  $f_{1N}$  при  $N$ -м воз-

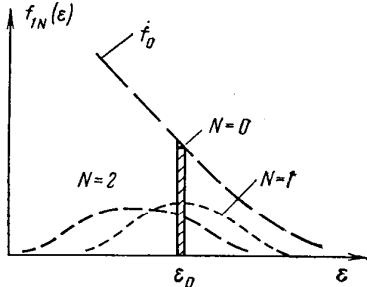


Рис. 4. Вид функции  $f_{1N}(\epsilon)$  при последовательных отражениях электронов от барьера.  $t = N\tau_b$

вращении к барьеру имеет вид

$$f_{1N}(E) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-(E-E')^2} dE' \cdot f_{1(N-1)}(E'). \quad (22)$$

Здесь

$$E = (\varepsilon - \varepsilon_0)/2\Delta\varepsilon, \quad f_{11}(E) = \text{const } e^{-E^2}. \quad (23)$$

Обозначим долю уходящих на каждом шаге электронов через  $a_N$ . Тогда если нормировать  $f_1$  так, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{11}(E) dE = 1 \text{ или } a_0 = -1,$$

т. е. полное число электронов в сгустке (в условных единицах) равно единице, то

$$a_N = \int_0^{\infty} f_{1N}(E) dE. \quad (24)$$

Вид функций  $f_{1N}$  приведен на рис. 4. Так как при  $N=0$  имеется дефицит тока, а при  $N \geq 1$  возврат того же тока на коллектор, то

$$\sum_{N=0}^{\infty} a_N = 0. \quad (25)$$

Используя полученные выше соотношения, найдем вид функций  $j_1(t)$ ,  $K_1(t)$  и  $K_1(t)$ . Учтем, что в рассматриваемом случае  $j_1(t) = K(t)\varphi_1\Delta t$ , где

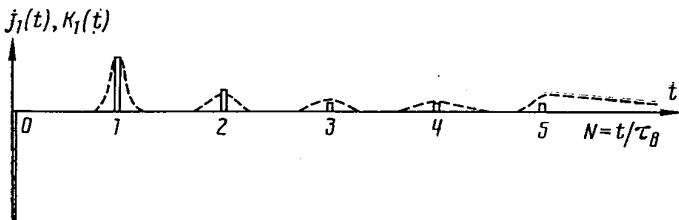


Рис. 5. Вид функций  $K_1(t)$  и  $j_1(t)$  при  $\Delta\tau_b=0$  (сплошная линия) и  $\Delta\tau_b \neq 0$  (пунктир)

$j_1(t)$  состоит из суммы импульсов тока, разнесенных во времени на  $\tau_b$  ( $t=N\tau_b$ ), причем доля электронов в каждом из них равна  $a_N$  (рис. 5).

Если предположить, что каждый импульс  $j_{1N}$  на рис. 5 имеет нулевую ширину во времени, то можно, интегрируя (24), получить вид  $J(\omega)$  для гармонического возмущения.

Заметим, что величины  $a_N$ , полученные при численном интегрировании (24), совпадают с коэффициентами разложения в ряд функции  $\sqrt{1-x}$ , поэтому для возмущения вида  $\exp(-i\omega t)$  функцию  $J(\omega)$  можно представить в виде<sup>3</sup>

$$J(\omega) = 1 - \sum_{N=1}^{\infty} a_N e^{iN\omega\tau_b} = \sqrt{1 - e^{i\omega\tau_b}}. \quad (26)$$

Введем теперь в рассмотрение процесс уширения импульсов тока во времени. В реальной магнитной ловушке величина  $\tau_b$  является различной для разных электронов, поэтому вид функции  $j_1(t)$  отличается от рассмотренного выше. Импульсы тока, из которых состоит функция  $j_1(t)$ , имеют колоколообразный вид с характерным временем разброса  $\Delta\tau_b$  (см. рис. 5).

<sup>3</sup>  $a_N = a_{N-1}(2N-3)/2N; N \geq 1$ .

Количество электронов, уходящих из ловушки на коллектор, при каждом отражении сгустка от барьера то же самое (в первом приближении), что и при  $\Delta\tau_b=0$ .

Уширение  $\Delta\tau_b$  происходит, как отмечалось выше, в основном за счет двух физических процессов. Разброс по магнитным моментам приводит к разбросу по  $\tau_b$  за счет различия в средних продольных скоростях электронов. Соответствующая величина  $\Delta\tau_{b\mu}^N$  линейно зависит от времени  $t$  (или  $N$ ) и при  $N$  отражениях равна

$$\Delta\tau_{b\mu}^N = \tau_b (\Delta v_\parallel / v_\parallel) N, \quad (27)$$

где  $\Delta v_\parallel$  — средний разброс по  $v_\parallel$ . В обычных магнитных ловушках потенциал  $e\Phi_0 \gg T_e$ , так что для рассматриваемых электронов  $v_\parallel \gg \Delta v_\parallel$  (оценка дает  $\Delta v_\parallel / v_\parallel \approx 0,05 - 0,1$ ).

Другой процесс — диффузия электронов по энергии. Очевидно, что этот процесс сопровождается диффузией по  $v_\parallel$  и соответственно по  $\tau_b$ . Так как изменение энергии зависит от времени  $\sim t^{1/2}$ :

$$\Delta\varepsilon \approx T_e (t/\tau_{ee})^{1/2} (T_e/e_0)^{1/2}, \quad (28)$$

то уширение импульса тока, связанное с изменением энергии  $\Delta\tau_{be}^N$ , расчет как  $N^{1/2}$ :

$$\Delta\tau_{be}^N = \tau_b (\bar{\Delta\varepsilon}/\varepsilon) N^{1/2}. \quad (29)$$

Более детальный анализ формы импульсов тока  $j_1(t)$  можно провести, если учесть точный вид функции распределения вблизи барьера, конфигурацию барьера в пространстве скоростей и определять  $j_1(t)$ , используя численные решения уравнения Фоккера — Планка. Однако, как будет показано ниже, эти уточнения не могут существенно повлиять на характер функций  $K_1(t)$  и  $J(\omega)$ .

Для нахождения  $K_1(t)$  и  $J(\omega)$  будем предполагать, что расплывание импульса тока во времени описывается функцией Гаусса, тогда

$$K_1(t) = \sum_{N=0}^{\infty} a_N e^{i\omega N \tau_b} \frac{1}{\sqrt{2\pi \Delta\tau_b^N}} \exp\left[-\left(\frac{t-N\tau_b}{2\Delta\tau_b^N}\right)^2\right]. \quad (30)$$

Из (30) и (21) можно получить выражение для  $J(\omega)$ :

$$J(\omega) = 1 - \sum_{N=1}^{\infty} a_N \exp[-(\Delta\tau_b^N \omega)^2 + i\omega \tau_b N]. \quad (31)$$

Здесь

$$\Delta\tau_b^N = [(\Delta\tau_{b\mu}^N)^2 + (\Delta\tau_{be}^N)^2]^{1/2},$$

где  $\Delta\tau_{b\mu}^N$  и  $\Delta\tau_{be}^N$  взяты из (27) и (29).

Вид функции  $J(\omega)$  для случая, когда можно пренебречь уширением  $\Delta\tau_b$ , приведен на рис. 3. При этом выражение (31) переходит в (26). Внешняя кривая на графике построена для случая, когда  $\text{Im } \omega = 0$  (для нее  $|J| \leq 2$ ); при  $\text{Im } \omega > 0$  и  $\Delta\tau_b > 0$  кривые лежат внутри этой области.

Вид функции  $J(\omega)$  для реальных систем ( $\omega\Delta\tau_b^{-1} \approx 1$ ) при  $\Delta\tau_b^{-1} = 0,1\tau_b$  приведен на том же рисунке. Скорость, с которой кривая закручивается и приближается к значению  $J=1$ , зависит как от величины параметра  $\Delta\tau_b^{-1}/\tau_b$ , так и величины  $\text{Im } \omega$ .

Функция  $J(\omega)$  слабо зависит от того, по какому закону изменяется  $\Delta\tau_b^N$  ( $\sim N$  или  $\sim N^{1/2}$ ). Как показали расчеты, при достаточно больших значениях  $\Delta\tau_b^{-1}/\tau_b$  ( $\geq 0,1$ ) величина  $J(\omega)$  практически не зависит от показателя степени при  $N$ ; при промежуточных значениях ( $0,01 - 0,1$ ) отличие для разных вариантов в среднем менее 10% [10]. Из этого следует, что вычисление формы импульсов тока в  $j_1(t)$  с помощью более точных методов не должно существенно влиять на вид функции  $J(\omega)$ .

Проведенные вычисления показывают, что функция отклика в резонансной области ( $\omega \approx \tau_b^{-1}$ ) не имеет существенных особенностей, а испы-

тыает колебания с амплитудой порядка единицы. Это решение (выражения (30), (31)) плавно сшивается с решениями в смежных областях, полученными выше (см. [10]).

*Замечание.* В настоящей работе мы учитывали изменение тока  $j_1$ , связанное только с изменением высоты барьера. В интересующем нас случае желобковых колебаний относительные изменения тока, связанные с изменением плотности плазмы, имеют порядок [11]

$$\frac{j_1}{j_0} \simeq \frac{n_1}{n_0} \simeq \frac{1}{n_0} \frac{\partial n_0}{\partial r} \frac{ck\varphi_1}{H\omega}$$

Из сравнения этого выражения с (9) или (16) видно, что его вклад в ток  $j_1$  мал для рассматриваемых частот.

### 5. Заключение

Полученная выше зависимость величины плотности продольного электронного тока от амплитуды колебаний и их частоты позволяет исследовать различные задачи о влиянии продольных токов на устойчивость плазмы в открытых ловушках.

К этим задачам относится, в частности, проблема стабилизации вращающейся плазмы продольными токами, рассмотренная авторами в [8] при некоторых упрощающих предположениях.

Авторы выражают глубокую благодарность Б. В. Арсенину, Б. И. Брейзману и В. В. Мирнову за ценные дискуссии и помощь в работе.

### Литература

1. Будкер Г. И. // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М.: Изд-во АН СССР, 1958. Т. III. С. 3.
2. Днестровский Д. Н., Костомаров Д. П. // Итоги науки и техники. Сер. Физика плазмы. М.: ВИНИТИ, 1981. Т. 2. С. 190; Futch A. H., Holdren J. R., Killeen J., Mirin A. A. // Plasma Phys. 1972. V. 14. P. 211.
3. Kunkel W. K., Guillory J. // 7th Intern. Conf. on Phen. in Ionized Gases. Belgrade, 1965, V. 8. P. 702.
4. Liberman M. A., Wong S. L. // Plasma Phys. 1977. V. 19. P. 745.
5. Prater R. // Phys. Fluids. 1974. V. 17. P. 193.
6. Трубников Б. А. // Вопросы теории плазмы/Под ред. Леонтиевича М. А. М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 1. С. 98.
7. Брагинский С. И. // Там же. С. 183.
8. Бехтенев А. А., Волосов В. И. // Журн. техн. физики. 1977. Т. 47. С. 1450.
9. Pastukhov V. P. // Nucl. Fusion. 1974. V. 14. P. 3.
10. Бехтенев А. А., Вандегрифт Г. Г., Волосов В. И. Препринт № 85-132. Новосибирск: ИЯФ СО АН СССР, 1985.
11. Михайловский А. Б. Теория плазменных неустойчивостей. Т. 2. М.: Атомиздат, 1977. § 4.1.

Институт ядерной физики  
СО АН СССР

Поступила в редакцию  
16.VII.1986  
Исправленный вариант  
получен 16.VI.1987